§3 代数的表示

目标：模论介绍代数表示：有限维半单代数的结构与模论

§3.1. 域上代数

定义 3.1.1. $\mathbb{F}$-代数 $\overset{(A,+,\times,\cdot)}{A}$ = $\overset{(A,+,\times)}{\text{结合环}}$ + $\overset{(A,+,\cdot)}{\mathbb{F}\text{-向量空间}}$ + 相容条件

1° 加法一致
2° $\mathbb{F} \in Z(A)$
即 $\lambda(ab)=(\lambda a)b=a(\lambda b)$

代数 A 的维数 $:= \dim_{\mathbb{F}} A$

本书仅考虑带有单位元的非零环. ($\Rightarrow$ $\mathbb{F} \subseteq A$)

域扩张 $\mathbb{K}/\mathbb{F}$, 多项式代数 $\mathbb{F}[x]/\mathbb{F}$, 矩阵代数 $M_n(\mathbb{F})/\mathbb{F}$. $\mathbb{H}/\mathbb{R}$ 四元数代数.

问题: $\mathbb{H}$ 是不是 $\mathbb{C}$ 上的代数.

定义 3.1.2、子代数, (左,右)理想, 商代数 (均有 $\mathbb{F}$-空间和环的双重结构)

代数同态 = 环同态 + $\mathbb{F}$-线性映射.

$\mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Im} f$, 单同态, 满同态, $\mathbb{F}$-代数同态

例 3.1.3.1 $\mathbb{F}[x]$ = 域 $\mathbb{F}$ 上的单变元多项式全体作成的 $\mathbb{F}$-代数

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}[x] & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{F}[a] \hookrightarrow A \ni a \\ f & \longmapsto & f(a) \end{array}$$

$\mathrm{Ker}\varphi = (m_a(x))$

a 在 $\mathbb{F}$ 上的极小多项式.

性质 3.1.2. 1). $A/\mathrm{ker} f \cong \mathrm{Im} f$ ($\mathbb{F}$-代数同构)

2) $A/J \cong (A/I)/(J/I)$

3) $A_0+I/I \cong A_0/A_0\cap I$ ($I \triangleleft A$, $A_0 \subseteq A$ 子代数)

4) $\{J \triangleleft A \mid I \subseteq J\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\bar{J} \triangleleft A/I\}$ $J \mapsto J/I$

定义 设 $A_1,\cdots,A_n$ 为 $\mathbb{F}$-代数，则在环 $A_1\times\cdots\times A_n$ 上定义数乘

$$\lambda(a_1,\cdots,a_n) := (\lambda a_1,\cdots,\lambda a_n) \qquad (\forall a_i\in A_i)$$

$A_1\times\cdots\times A_n$ 也构成 $\mathbb{F}$-代数. 称之为 **$A_1,\cdots,A_n$ 的直积**.

给定 $\mathbb{F}$-代数 A，若存在 $\mathbb{F}$-代数 $A_1,\cdots,A_n$ 使得 $A\cong A_1\times\cdots\times A_n$（作为 $\mathbb{F}$-代数），则称 $A_1\times\cdots\times A_n$ 为 A 的**直积分解**

若 A 没有非平凡的直积分解，则称 A 为**连通代数**.

例：$\mathbb{F}$，$\mathbb{F}[x_1,\cdots,x_n]$，

基本问题：如何将 $\mathbb{F}$-代数分解为连通代数的直积.

性质：设 $A=A_1\times\cdots\times A_n$. 记 $e_i=(0,\cdots,1,\cdots,0)$. 则

1) $e_i^2=e_i$ 幂等元
2) $e_i\in Z(A)$， 中心
3) $e_ie_j=0$ $(\forall i\neq j)$ 正交
4) $1=e_1+e_2+\cdots+e_n$ 单位分解
5) $Ae_i=e_iA=0\times\cdots\times A_i\times\cdots\times 0$ 为 A 的理想，且 $A=Ae_1\oplus Ae_2\oplus\cdots\oplus Ae_n$

定义：1) 若 $e^2=e$ 则称 e 为**幂等元**. 45'

2) 若 e_1,e_2 幂等，且 $e_1e_2=0$. 则称 e_1 与 e_2 **正交**.

3) 若幂等元 $e\in Z(A)$，则称之为**中心幂等元**

4) 设 $e_1,\cdots,e_n$ 为 A 上的两两正交的中心幂等元. 若 $1=e_1+\cdots+e_n$，则称 $e_1+\cdots+e_n$ 为单位元 1 的**正交中心幂等分解**

性质 3.1.4. $A=\mathbb{F}$-代数. TFAE

i) A 的代数直积分解

ii) A 为非零理想的直和（作为向量空间的直和）

iii) A 的单位元正交中心幂等分解

Pf：i)⇒ii)：$A\overset{\varphi}{\cong}A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$. $I_i:=\varphi^{-1}(0\times\cdots\times A_i\times\cdots\times 0)\lhd A$

$\Rightarrow\ A=I_1\oplus I_2\oplus\cdots\oplus I_n$

ii)⇒iii)：$1=e_1+e_2+\cdots+e_n$ $(e_i\in I_i)$

$i\neq j\Rightarrow e_ie_j\in I_i\cap I_j=0$

$e_i=(e_1+\cdots+e_n)e_i = e_ie_i$

$$\forall a_i\in I_i \Rightarrow \begin{cases} a_i = 1a_i = (e_1+\cdots+e_n)a_i = e_ia_i \\ a_i = a_i\cdot 1 = a_i(e_1+\cdots+e_n) = a_ie_i \end{cases}$$

$$\forall a = a_1+\cdots+a_n \Rightarrow e_ia = e_ia_i = a_i = a_ie_i = ae_i$$

$$\Rightarrow e_i\in Z(A)$$

定义 3.1.6. **本原幂等元** := 不能表成两个正交幂等元之和的幂等元

中心本原幂等元 := 不能表成两个正交中心幂等元之和的中心幂等元

注: 中心本原未必本原. **例:** $\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\\&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&\\&1\end{pmatrix}\in M_2(F)$

性质: A 连通 $\Leftrightarrow$ A 仅有平凡中心幂等元 0, 1. 45'

命题 3.1.7. e = 中心幂等元

i). e = 中心本原 $\Leftrightarrow$ $Ae \lhd A$ 不能分解成非零理想的直和.

ii). e_1, e_2 = 中心本原 $\Rightarrow$ $e_1=e_2$ 或 $e_1e_2=0$.

iii). $1=e_1+\cdots+e_n$, $e_1,\cdots,e_n$ 中心本原幂等元 $\Rightarrow$ $e_1,\cdots,e_n$ 为全体中心本原幂等元

Pf: i). $\Leftarrow$): 假若 $Ae=I_1\oplus I_2 \Rightarrow e=e_1+e_2 \Rightarrow \begin{cases} e_1,e_2\in Z(A) \\ e_1^2=e_1 \ \& \ e_2^2=e_2 \ \& \ e_1e_2=0\end{cases}$

$e=e_1+e_2$ (正交中心幂等) $\Rightarrow Ae=I_1\oplus I_2$ ($I_i := Ae_i$)

ii) $e_1 = e_1[e_2+(1-e_2)] = e_1e_2 + e_1(1-e_2) \Rightarrow e_1e_2=0$ 或 $e_1(1-e_2)=0$

同理 $\Rightarrow e_2e_1=0$ 或 $e_2(1-e_1)=0$

$\Rightarrow e_1e_2=0$ 或 $e_1=e_1e_2=e_2$

iii) f = 中心本原幂等. 假若 $f\neq e_i\ \forall i$. 则

$f=f(e_1+\cdots+e_n)\overset{ii}{=}0$ ↯

推论: 1) 单位元的中心本原幂等分解唯一

2) A 的连通分解唯一.

性质 3.1.5 $A=A_1\times\cdots\times A_n$, $I=A$ 的左(右)理想. 则 $I=I_1\oplus\cdots\oplus I_n$. 其中 $I_i=I\cap A_i$.

Pf: • $I_i = I\cap A_i \lhd A_i \Rightarrow I_1\oplus\cdots\oplus I_n\subseteq I$.

$\forall a=a_1+\cdots+a_n\in I \Rightarrow I\lhd A \Rightarrow a_i=a_ie_i=(a_1+\cdots+a_n)e_i=ae_i\in I_i$

$\Rightarrow a=a_1+\cdots+a_n\in I_1\oplus\cdots\oplus I_n$ □

问题：连通代数有哪些具体的例子？

定义 3.6.4. 若 A 的所有不可逆元组成 A 的理想，则称 A 为局部代数

例：$\mathbb{F}[x]/(f^n)$ f 不可约　$\mathbb{F}[x,y]/(x^2,xy,y^2)$

性质：局部 $\overset{\text{有限维}}{\Longleftrightarrow}$ 仅有平凡幂等元 0 和 1. $\Rightarrow$ 连通.

Pf: $\Rightarrow$: 记 m 为不可逆元组成的理想. 设 e 为非平凡幂等元.

$e(1-e)=0 \Rightarrow e, 1-e$ 均不可逆

$\Rightarrow e, 1-e \in m \Rightarrow 1=e+(1-e)\in m$ ↯

$\Leftarrow$: 仅需证明：$A\setminus A^\times$ 关于 $+$ 封闭.

$\forall a\in A\setminus A^\times \Rightarrow$ 交换代数 $\mathbb{F}[a]$ 仅有平凡幂等元 $\overset{\text{有限}}{\Rightarrow}$ $\mathbb{F}[a]$ 局部 $\overset{a\notin A^\times}{\Longrightarrow}$ a 幂零.

若 $a,b\in A\setminus A^\times$ s.t. $a+b\in A^\times$. $\Rightarrow \exists c$ s.t. $ac+bc=1 \Rightarrow ac=1-\underset{\text{幂零}}{bc}\in A^\times$ ↯.

· 无限维反例：$\mathbb{F}[x]$.

定义：可除代数 D = $\mathbb{F}$-代数 + 除环.

例 3.1.3.4. $\mathbb{H}=\mathbb{R}+\mathbb{R}i+\mathbb{R}j+\mathbb{R}k$，$i^2=j^2=k^2=ijk=-1$ $\rightsquigarrow$ $\mathbb{H}=\mathbb{R}$-代数.

性质：$\mathbb{H}$ 为可除代数.

$\forall\ x=a+bi+cj+dk\in\mathbb{H}\setminus\{0\} \Rightarrow x^{-1}=\dfrac{a-bi-cj-dk}{a^2+b^2+c^2+d^2}$

事实：1. $\mathbb{R}$ 上有限维可除代数仅有 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

2. 代数闭域上的有限维可除代数仅有 $\mathbb{F}$ 本身.

3. 有限域上的有限维可除代数为域 (Wedderburn 定理)

定义：单代数 := 没有平凡理想的非零 $\mathbb{F}$-代数

例：$M_n(D)=\{D$ 上 n 阶方阵$\}$

$$J_n(D)=\left\{\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ & \lambda_1 & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & \lambda_2\\ & & & \lambda_1\end{pmatrix}\ \middle|\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in D\right\}\subseteq M_n(D)$$

Jordan 子代数不是单代数

性质：若 A_i 均为单代数，$I\triangleleft A_1\times\cdots\times A_n$，则 I 必为若干 A_i 的直积.

 · A_i = 单，$I_i\triangleleft A_i \Rightarrow I_i=0$ 或 $I_i=A_i$.

定理：{有限维单代数} = $\{M_n(D) \mid D$ 可除 $n\geq 1\}$ （作图证明）

定义：称同构于有限个单代数的直积的代数为**半单代数**（与课本上定义等价）

{单}∩{局部}		仅有平凡理想		
{可除代数}	⊆	{单代数}	⊆	{半单代数}
End(单模)		End(单$^{\oplus n}$)		
D		$M_n(D)$		
∩|		∩|		∩|
仅有平凡幂等元		仅有平凡中心幂等元		
{局部代数}	⊆	{连通代数}	⊆	{代数}
End(不可分解)		End(不可解^n)		
$D[x]/x^2$		$M_n(D[x]/x^2)$		

习题：{局部}∩{单} = {可除}

Pf：局部 $\Rightarrow I:=\{a\in A \mid a\notin A^\times\} \underset{\neq}{\trianglelefteq} A \overset{单}{\Rightarrow} I=0 \Rightarrow$ 可除.

本课程主要研究对象之一 $\mathbb{F}G$.

例3.1.3.3. G 群. 称 $\mathbb{F}G$ 为 G 在 $\mathbb{F}$ 上的**群代数**.

- $\mathbb{F}G$ 有限代数 $\Leftrightarrow |G|<\infty$
- $\mathbb{F}G$ 交换 $\Leftrightarrow G$ 交换
- $H\leq G$ 子群 $\Leftrightarrow \mathbb{F}H\leq \mathbb{F}G$ 子代数

§3.2. 代数上的模

群 G 作用	$G\times X\to X$	$G\xrightarrow[\text{gp. hom.}]{\rho} S_X := \{f: X\to X \mid \text{bijection}\}$
群 G 的线性表示	$G\times V\to V$	$G\xrightarrow[\text{gp hom.}]{\rho} GL(V)\subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$
A-模	$A\times V\to V$	$A\xrightarrow[\text{代数同态}]{\varphi} \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$

定义 3.2.1. A = 有限维 $\mathbb{F}$-代数. V = 有限维 $\mathbb{F}$-向量空间

1) 若 $\varphi: A\to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ 为 $\mathbb{F}$-代数同态, 称 (V,φ) 为 A 的 **$\mathbb{F}$-表示**.

2) 若 $A\times V\to V$ $(a,v)\mapsto av$ 满足

- $a(v_1+v_2) = av_1 + av_2$ $\quad\forall a\in A,\ \forall v_1,v_2\in V$
- $(\lambda a)v = a(\lambda v) = \lambda(av)$ $\quad\forall\lambda\in\mathbb{F},\ \forall a\in A,\ \forall v\in V$
- $(a+b)v = av+bv$ $\quad\forall a,b\in A,\ \forall v\in V$
- $(ab)v = a(bv)$ $\quad\forall a,b\in A,\ \forall v\in V$
- $1v = v$ $\quad\forall v\in V.$

则称 V 为 **左 A-模**.

3) 若 $A\times V\to V$ $(a,v)\mapsto av$ 满足

- $(v_1+v_2)a = v_1a + v_2a$ $\quad\forall a\in A,\ \forall v_1,v_2\in V$
- $v(\lambda a) = (\lambda v)a = (av)\lambda$ $\quad\forall\lambda\in\mathbb{F},\ \forall a\in A,\ \forall v\in V$
- $v(a+b) = va+vb$ $\quad\forall a,b\in A,\ \forall v\in V$
- $v(ab) = (va)b$ $\quad\forall a,b\in A,\ \forall v\in V$
- $v1 = v$ $\quad\forall v\in V.$

则称 V 为 **右 A-模**.

性质:
$$\{\mathbb{F}\text{-表示}\} \xleftrightarrow{\cong} \{\text{左 } A\text{-模}\} \xleftrightarrow{\cong} \{\text{右 } A^{op}\text{-模}\}$$
$$(V,\varphi) \longmapsto (A\times V\to V,\ (a,v)\mapsto \varphi(a)(v))$$

其中 $A^{op} = (A,+,\circ)$ $\quad a\circ b := ba$

注 $\mathrm{End}_A({}_AA)\cong A^{op}$

定义3.2.2 设 M, M' 为(左) A-模，若 $\mathbb{F}$-线性映射 $f: M \to M'$ 满足

$$f(am) = af(m) \quad \forall a \in A, \forall m \in M$$

则称 f 为 A-模同态.

$$\mathrm{Hom}_A(M, M') := \{ f: M \to M' \mid A\text{-模同态} \}$$

若 A 模同态 f 为双射，则称 f 为 A-模同构. 记作 $M \cong M'$.

性质3.2.2：
1) $f: M \to N \Rightarrow \mathrm{im} f \cong M/\ker f$
2) $N \subseteq L \subseteq M \Rightarrow M/L \cong (M/N)/(L/N)$
3) $N, L \subseteq M \Rightarrow (L+N)/N \cong L/(N \cap L)$
4) $\{ L \subseteq M \mid N \subseteq N \} \xleftrightarrow{1:1} \{ I \subseteq M/N \}$

例3.2.7.1. ${}_AA$ = 左正则 A-模. $\quad I \subseteq {}_AA$ 子模 $\Leftrightarrow$ I 为 A 的左理想

A_A = 右正则 A-模 $\quad I \subseteq A_A$ 子模 $\Leftrightarrow$ I 为 A 的右理想

例3.2.7.2：秩 n 自由 A 模 ：$\underbrace{{}_AA \oplus {}_AA \oplus \cdots \oplus {}_AA}_{n个} =: nA$

性质：$\mathrm{Hom}_A(nA, X) = \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n}$

例3.2.7.3. 循环模 $M = Am$

性质：$M \cong A/\ker f \quad$ 其中 $A \xrightarrow{f} M$. $\quad$ 45'
$a \mapsto am$

定理：$\{G 的 \mathbb{F}\text{-表示}\} \xleftrightarrow{\cong} \{左 \mathbb{F}G\text{-模}\}$ $\quad$ $\{不可约表示\} \xleftrightarrow{\cong} \{单模\}$

G-模映射 $= \mathbb{F}G$-模同态 $\quad$ $\{完全可约表示\} \xleftrightarrow{\cong} \{半单模\}$

- $(V, \varphi) = G$ 的 $\mathbb{F}$ 表示. $\Rightarrow$ V 为左 $\mathbb{F}G$-模：

$$\Big(\sum_{g \in G} \lambda_g \cdot g\Big)(v) := \sum_{g \in G} \lambda_g \cdot \varphi(g)(v) \in V$$

- V = 左 $\mathbb{F}G$-模 $\Rightarrow$ $(V, \varphi) = G$ 的 $\mathbb{F}$ 表示：

$$\varphi(g)(v) := (1 \cdot g)(v)$$

用 $\mathbb{F}G$ 的模理论来研究 G 的 $\mathbb{F}$-表示.

问题：A/I-模均可看成 A-模：$A \twoheadrightarrow A/I \xrightarrow{\rho} GL(V)$

哪些 A-模来自 A/I-模？

定义 3.2.3. M=左 A-模.

$$\mathrm{ann}(M) := \{a\in A \mid aM=0\}$$

M 的零化理想

若 $\mathrm{ann}(M)=0$，则称 M 为忠实 A-模. ($\Leftrightarrow \varphi: A\to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(M)$ 为单)

性质 3.2.3. 设 $I\lhd A$. 则

$$\{M \mid \text{左 } A/I\text{-模}\} \xrightarrow{1:1} \{M \mid \text{左 } A\text{-模 且 } I\subseteq \mathrm{ann}(M)\}$$

$M\oplus N \quad a(m,n):=(am,an)$

称非零左 A-模 M 为不可分解 A-模，若 M 仅有平凡直和分解.

任意有限维 A-模均可写成有限个不可分解 A-模的直和

问题：1) 如何分解？

2) 如何判定不可分解性？

3) 如何分类？

例：设 ${}_AA = M_1\oplus\cdots\oplus M_n$. 记 $1=:e_1+\cdots+e_n$ 其中 $e_i\in M_i$. 则

$$e_i = e_i\cdot 1 = \sum_j e_ie_j \Rightarrow \begin{cases} e_i^2=e_i \\ e_ie_j=0 \quad \forall j\neq i\end{cases}$$

$\Rightarrow 1=e_1+e_2+\cdots+e_n$ 为正交幂等分解

性质：$\{{}_AA \text{ 的直和分解}\} \xleftrightarrow{1:1} \{1 \text{ 的正交幂等分解}\}$

pf: $1=\sum_i e_i \quad M_i := Ae_i \Rightarrow {}_AA=\bigoplus_i M_i$

"$\subseteq$": $x=\sum_i xe_i < \sum M_i$

"$\oplus$": 设 $0=\sum_j y_je_j \Rightarrow 0=0e_i=(\sum_j y_je_j)e_i=y_ie_i$ □

$\mathrm{End}_A(M) = \mathrm{Hom}_A(M,M)$ 为 $\mathbb{F}$-代数 $\quad (\mathrm{End}_A(A) \cong A)$

$$\begin{array}{ccccccccc} M & = & M_1 & \oplus & M_2 & \oplus \cdots & \oplus & M_n \\ \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ M & = & M_1 & \oplus & M_2 & \oplus \cdots & \oplus & M_n \end{array}$$

$e_i : M \to M$

$$e_i\big|_{M_j} = \begin{cases} id_{M_i} & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

推论 3.2.10. $\{M$ 的直和分解$\} \xleftrightarrow{1:1} \{1_M \in \mathrm{End}_A(M)$ 的正交幂等分解$\}$

Pf: $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n \twoheadrightarrow M_j \hookrightarrow M$ (composite e_j)

$\Rightarrow 1_M = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ 为正交幂等分解

反之，设 $1_M = e_1 + \cdots + e_n$ 为正交幂等分解. $M_i := \mathrm{Im}(e_i)$

$\Rightarrow M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$

$\Big(\forall m \in M \Rightarrow m = 1_M(m) = \sum_i e_i(m) \in M_1 + \cdots + M_n$

若 $0 = \sum_i e_i(m_i) \Rightarrow e_j(0) = \sum_i e_j(e_i(m_i)) = e_i(m_i) \Rightarrow e_i(m_i) = 0 \Big)$

推论: 1) M 不可分解 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{End}_A(M)$ 为局部代数

2) $\{M$ 的直和分解$\} \xleftrightarrow{1:1} \{$代数 $\mathrm{End}_A(M)$ 的左正则模的直和分解$\}$

定理 3.6.2 (Krull-Schmit-Remak, 分解唯一). A = 有限维代数 $\quad M$ = 有限维 A-模.

$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n = N_1 \oplus \cdots \oplus N_m$ (M_i, N_j 不可分解), 则

i) $m = n$

ii) $\exists\, \sigma \in S_n$ s.t. $M_i \cong N_{\sigma(i)}$

引理 3.6.6. M, N = 不可分解. $M \neq 0$. $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M$. 若 $g \circ f$ 为同构, 则 f 与 g 均为同构.

Pf: $g \circ f$ 同构 $\Rightarrow$ f 单 & g 满 $\Rightarrow N = \ker g \oplus \mathrm{im} f$

$\Big(\cdot\ n = (n - f \circ g(n)) + f \circ g(n) \Rightarrow N = \ker g + \mathrm{im} f$

$\cdot\ \forall n \in \ker g \cap \mathrm{im} f \Rightarrow n = f(m)$ & $g(n) = 0 \Rightarrow m = g \circ f(m) = 0 \Rightarrow n = 0 \Big)$

N 不可分解 $\Rightarrow \ker g = 0$ & $\mathrm{im} f = N \Rightarrow g$ 单 & f 满

Pf of thm 3.6.2: 对n归纳. $n=1$ ✓

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "e_i"] \arrow[d, two heads, "f_j"'] & M_i \\ N_j & \end{tikzcd} \Bigg\} \Rightarrow 1 = e_1+\cdots+e_n = f_1+\cdots+f_m \quad (e_i, f_j \text{ 幂等})$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, hook] \arrow[rrr, bend right, "id"'] & M \arrow[r, "1=f_1+\cdots+f_m", "\cong"'] & M \arrow[r, "e_1"] & M_1 \end{tikzcd} \\ M_i = \text{不可分解} \Rightarrow End_A(M_i)\text{局部} \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow id_{M_1} = e_1f_1+e_1f_2+\cdots+e_1f_m \\ \Rightarrow \exists j \text{ s.t. } e_1\circ f_j\big|_{M_1} \in End_A(M_1)^{\times} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, hook] \arrow[rrrr, bend right, "\cong"'] & M \arrow[r, two heads, "f_j"] & N_j \arrow[r, hook] & M \arrow[r, two heads, "e_1"] & M_1 \end{tikzcd} \Rightarrow f_j\big|_{M_1}: M_1 \cong N_j : e_1\big|_{N_j}$$

$$\Rightarrow M = N_j \oplus (M_2+\cdots+M_n)$$

$$\begin{tikzcd} & N_j \arrow[d, hook] \arrow[dl, "\cong"'] & \\ M_1 & M \arrow[l, two heads] & M_2+\cdots+M_n \arrow[l, two heads] \\ & m & \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow M_2\oplus\cdots\oplus M_n \cong M/N_j$$
$$\cong N_2\oplus\cdots\oplus N_m$$

- $\forall x \in N_j \cap (M_2+\cdots+M_n)$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{tikzcd} N_j \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "\cong"'] & M \arrow[r, "e_1"] & M_1 \end{tikzcd} \\ x \mapsto x \mapsto 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0$$

- $\forall m \in M$, $\exists n_j \in N_j$ s.t.

$\Rightarrow e_1(m) = e_1(n_j)$

$\Rightarrow m - n_j \in \ker e_1 = M_2+\cdots+M_n$

$\Rightarrow m = n_j + (m-n_j) \in N_j + (M_2+\cdots+M_n)$

引理 3.2.11. $End_A(M_1\oplus\cdots\oplus M_n) \cong \left\{ \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix} \middle| f_{ij} \in Hom_A(M_j, M_i) \ 1\le i,j \le n \right\}$

$$f \longmapsto (e_i f\big|_{M_j})_{n\times n}$$

$$\Big(m_1+\cdots+m_n \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(m_j)\Big) \longleftarrow (f_{ij})_{n\times n}$$

特别地, 若 $Hom_A(M_i, M_j) = 0$ ($\forall\, i\ne j$), 则

$$End_A(M_1\oplus\cdots\oplus M_n) \cong End_A(M_1)\oplus\cdots\oplus End_A(M_n).$$

$$(f_{ij})_{n\times n}\cdot(g_{ij})_{n\times n} := \Big(\sum_{l} f_{il}g_{lj}\Big)_{n\times n}$$

$$M_j \xrightarrow{g_{lj}} M_l \xrightarrow{f_{il}} M_i$$

$$\begin{tikzcd} M_j \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "e_i f|_{M_j}"'] & M \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, two heads, "e_i"] & M_i \end{tikzcd}$$

$$m_j \mapsto m_j \mapsto \sum_{i=1}^{n} f_{ij}(m_j) \mapsto f_{ij}(m_j)$$

推论 3.2.12. $End_A(nL) \cong M_n(End_A(L))$

称非零左A-模 M 为单A-模(或A的不可约表示)，若 M 仅有平凡子A-模

半单模 := 单A-模的直和. (完全可约表示)

推论3.2.5. M=左A-模.

1) M=半单 $\Leftrightarrow$ M为若干单子模之和 $\Leftrightarrow$ 子模均有补 $\Leftrightarrow$ 单子模均有补

2). 半单模的子商仍为半单 (类似证明)

推论3.2.6 (Schur引理): M,N = 单A-模

1). 若 $\mathrm{Hom}_A(M,N)\neq 0$, 则 $M\cong N$. 特别地若 $M\ncong N$, 则 $\mathrm{Hom}_A(M,N)=0$.

2). $\mathrm{End}_A(M)$ = 有限维可除 $\mathbb{F}$-代数. 特别地, 若 $\mathbb{F}=\overline{\mathbb{F}}$, 则 $\mathrm{End}_A(M)\cong\mathbb{F}$.

定义3.3.1. A=有限 $\mathbb{F}$-代数, M=有限维 A-模. 称 M 的子模链

$$M=M_0\supset M_1\supset\cdots\supset M_{\ell-1}\supset M_\ell=0$$

为长度为 ℓ 的合成列, 若 M_i/M_{i+1} 均为单A-模. 称 M_i/M_{i+1} 为合成因子.

定理3.3.2 (Jordan-Hölder) 设 $M=M_0\supset M_1\supset\cdots\supset M_s=0$ 和 $M=N_0\supset N_1\supset\cdots\supset N_t=0$ 为 M的两个合成列, 则

i) $s=t$, 且

ii) $\exists\,\sigma\in S_t$ s.t. $N_i/N_{i+1}\cong M_{\pi(i)}/M_{\pi(i)+1}$ $\quad 0\leq i\leq s-1$

定理3.3.3. A=有限 $\mathbb{F}$-代数.

1) 任单A-模均为正则模的合成因子.

2) A 仅有有限个单A-模同构类.

代数直积分解与模的直和分解:

定理: 设 $A=A_1\times\cdots\times A_n$, 通过代数同态 $A\twoheadrightarrow A_i$ 将 A_i-模看成A-模. 则

1) $\forall$ A-模 M, $\exists!$ A_i-模 M_i (同构意义下, 可取为 e_iM) 使得

$$M\cong M_1\oplus\cdots\oplus M_n \quad (A\text{-模同构})$$

2) M为单模 $\Leftrightarrow$ $\exists\, i$ s.t. $M=e_iM$ 为单 A_i-模

分类A-模 $\Leftrightarrow$ 分类 A_i-模 (将分类问题约化到A连通情形)

§半单代数及其模理论

引理：1) ${}_AA$ 为半单 A-模 $\Leftrightarrow$ A 为极小左理想之和
$\Leftrightarrow$ A 为极小左理想的直和

2) $A=$ 半单代数 $\Rightarrow {}_AA$ 半单 A-模。 理想仅有 $0, A$. e.g. $M_n(D)$

Pf: 1) A 的极小左理想 $= {}_AA$ 的单子模。

2) $A = A_1\times\cdots\times A_n$. A_i 单 $\Rightarrow$ ${}_AA=\bigoplus_i {}_AA_i$. $\Rightarrow$ 仅需证明 "$A=$单" 的情形

$M=\sum\limits_{I:\text{左极小}} I \Rightarrow M$ 为 A 的理想 $\left(\begin{array}{l} I=\min \\ \forall a\in A \end{array}\right\} \Rightarrow Ia\cong I$ 或 $Ia=0$
$\Rightarrow Ia\subseteq M \Rightarrow Ma\subseteq M\ \forall a \Big)$

A 单 $\Rightarrow A=M \overset{1)}{\Rightarrow} {}_AA$ 半单.

问题：反过来对不对？

引理 3.4.4 $(M_n(D))^{op} \overset{\pi}{\cong} M_n(D^{op})$ $\quad X\mapsto X^T$ $\quad$ $(D,\cdot)$ = 可除 $\mathbb{F}$-代数

$(D^{op},\circ)$

$((M_n(D))^{op},\circ)$

$(M_n(D^{op}),*)$

Pf: $\left(\pi(X\circ Y)\right)_{ij} = \left(\pi(YX)\right)_{ij} = \left((YX)^T\right)_{ij}$

$= (YX)_{ji} = \sum\limits_{k=1}^{n} y_{jk}x_{ki} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{ki}\circ y_{jk}$

$= \left(X^T * Y^T\right)_{ij} = \left(\pi(X)*\pi(Y)\right)_{ij}$

定理 3.4.5 (Wedderburn-Artin)

${}_AA$ 半单 $\overset{①}{}\Leftrightarrow$ 任左 A-模半单 $\overset{②}{}\Leftrightarrow A=\prod\limits_{i=1}^{t} M_{n_i}(D_i) \overset{③}{}\Leftrightarrow A=$ 半单 $\overset{④}{}$ (单代数之积)

Pf: ①$\Rightarrow$②: $M=A$-模 $\Rightarrow$ $A^{\oplus n}\twoheadrightarrow M \overset{A\text{半单}}{\Rightarrow} M$ 半单

②$\Rightarrow$③: 设 $A\simeq n_1S_1\oplus\cdots\oplus n_tS_t$

$A = \mathrm{End}_A({}_AA)^{op} = \mathrm{End}_A(n_1S_1)^{op}\times\cdots\times\mathrm{End}_A(n_tS_t)^{op}$

$= M_{n_1}(D_1)^{op}\times\cdots\times M_{n_t}(D_t)^{op} = M_{n_1}(D_1^{op})\times\cdots\times M_{n_t}(D_t^{op})$

③$\Rightarrow$④: ✓

推论 3.4.6. 1) $\mathrm{char}\,\mathbb{F}\nmid|G| \Leftrightarrow \mathbb{F}G$ 半单 (Maschke)

2) $A=$ 单 $\Leftrightarrow A\cong M_n(D)$ $\quad D=$ 可除代数

特别地，若 $\mathbb{F}=\overline{\mathbb{F}}$，则 A 单 $\Leftrightarrow A\cong M_n(\mathbb{F})$; A 半单 $\Leftrightarrow A\cong\bigoplus_i M_{n_i}(\mathbb{F})$.

3) ${}_AA=$ 半单 $\overset{\mathrm{Tm}3.4.5}{\Leftrightarrow} A=$ 半单 $\overset{\text{同理}}{\Leftrightarrow} A_A=$ 半单

模理论

定理 3.4.7. i). $A=M_n(D)$ 有唯一不可约表示 (V,φ). 且

(1). ${}_AA\cong V^{\oplus n}$

(2). $\mathrm{End}_A(V)\cong D^{op}$

(3). $\mathrm{Im}(\varphi: A\to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V))\cong M_n(D)\cong M_n(\mathrm{End}_A(V)^{op})$

ii). 设 $A=M_{n_1}(D_1)\times M_{n_2}(D_2)\times\cdots\times M_{n_t}(D_t)$, V_i 为 $M_{n_i}(D_i)$ 唯一单模. 将 V_i 通过 $A\twoheadrightarrow M_{n_i}(D_i)\to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ 看成 A-模, 则 $V_1,V_2,\cdots,V_t$ 为 A 仅有的单模. 即 $\forall$ 单 A-模 S, $\exists!\, i$ s.t. $S\cong V_i$. 称 A_i 为 S 相应的单因子

Pf: i). • $V:=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\middle| x_1,\cdots,x_n\in D\right\}$. 则 V 自然地看成 $A=M_n(D)$-模.

事实: V 为单 A-模. $\left(\forall\ a=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\in V\setminus\{0\}\right.$. 不妨设 $a_i\neq 0$. 则
$\left.\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&x_1a_j^{-1}&0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0&x_na_j^{-1}&0&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\right.$. 即 $V=Aa$)

• 易见 $I_i:=\left\{\begin{pmatrix}0&\cdots&0&x_1&0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0&x_n&0&\cdots&0\end{pmatrix}\middle| x_1,\cdots,x_n\in D\right\}$ 为 $M_n(D)$ 的左理想 且 ${}_AI_i\cong {}_AV$.

(1) ${}_AA\cong I_1\oplus\cdots\oplus I_n\cong nV$.

• $\forall$ 取单 A-模 S. 则 $0\neq S\cong \mathrm{Hom}_A(A,S)=n\,\mathrm{Hom}_A(V,S)\Rightarrow \mathrm{Hom}_A(V,S)\neq 0\Rightarrow S\cong V$.

(2) • $f\in\mathrm{End}_A(V)$ (注 $V=A\alpha$, $\alpha=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$)

设 $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}:=f(\alpha)$ 则 $a_2=\cdots=a_n=0$ $\left(e_{11}\alpha=\alpha\Rightarrow e_{11}f(\alpha)=f(\alpha)\Rightarrow \checkmark\right)$

从而给出映射: $\varphi:\mathrm{End}_A(V)\to D^{op}$; $f\mapsto a_1$.

$\forall g\in\mathrm{End}_A(V)$ s.t. $\varphi(g)=b_1$. 则

$g\circ f(\alpha)=g((a_1e_{11})\cdot\alpha)=a_1e_{11}\cdot g(\alpha)=(a_1e_{11})\begin{pmatrix}b_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\ \varphi(g\circ f)=a_1b_1=\varphi(f)\cdot\varphi(g)=\varphi(g)\circ\varphi(f)$

易见 φ 为同构.

(3) • $\mathrm{Ker}\varphi\lhd M_n(D)$ $M_n(D)$ 单 $\Rightarrow \mathrm{Ker}\varphi=0\Rightarrow \mathrm{Im}(\varphi)\cong M_n(D)$

(ii). $e_i:=A_i$ 的单位元 $(1=e_1+\cdots+e_n)$ $\Rightarrow$ $S=1\cdot S=e_1S\oplus\cdots\oplus e_nS$

S=单 A-模 $\Rightarrow\exists!\, i$ s.t. $e_iS=S$ & $e_jS=0\ \forall j\neq i$

$\Rightarrow\begin{cases}A_iS=(Ae_i)\cdot S=AS=S\\ A_jS=(Ae_j)\cdot S=A\cdot 0=0 & (j\neq i)\end{cases}$ $\Rightarrow S$ 也为单 A_i-模

推论3.4.8. 若 A 半单, $\forall$ 单 A-模 V, 有 $\mathrm{End}_A(V)\cong\mathbb{F}$, 则单 A-模的个数为 $\dim_{\mathbb{F}} Z(A)$.

Pf: $A=M_{n_1}(D_1)\times\cdots\times M_{n_t}(D_t)$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{F}}(Z(A))=\dim_{\mathbb{F}}\big(Z(M_{n_1}(D_1)\times\cdots\times M_{n_t}(D_t))\big)$$

$$=\dim_{\mathbb{F}}\big(Z(M_{n_1}(D_1))\times\cdots\times Z(M_{n_t}(D_t))\big)$$

$$=\dim_{\mathbb{F}}\underbrace{\mathbb{F}\times\cdots\times\mathbb{F}}_{t}=t \qquad \square$$

定理3.4.10. $A\cong M_{n_1}(D_1)\times\cdots\times M_{n_t}(D_t)\cong M_{m_1}(K_1)\times\cdots\times M_{m_s}(K_s)$, 则

1) $t=s$ 且

2) $\exists\,\sigma\in S_t$ s.t. $n_i=m_{\pi(i)}$ & $D_i\cong K_{\pi(i)}$

Pf: 连通分解唯一, 因此仅需证明: $M_n(D)\cong M_m(K)\Rightarrow m=n$ & $D\cong K$.

这由 Thm 3.6.7 给出.

在群表示上的应用.

$A=\mathbb{F}$-代数 $\Rightarrow$ A的中心 $Z(A)=\{a\in A \mid ax=xa, \forall x\in A\}\subseteq A$

$G=C_1\sqcup C_2\sqcup\cdots\sqcup C_s$ 共轭类分拆.

$$C_i := \sum_{g\in C_i} g \in \mathbb{F}G \quad (\mathbb{F}G\text{的一个类和})$$

性质: $C_1, C_2, \cdots, C_s$ 为 $Z(\mathbb{F}G)$ 的一组基.

Pf: $C_1, C_2, \cdots, C_s \in Z(\mathbb{F}G)$ ✓

$\forall \; x=\sum_{g\in G}\lambda_g g \in Z(\mathbb{F}G) \Rightarrow hxh^{-1}=x \Rightarrow \lambda_{hgh^{-1}}=\lambda_g \; \forall g$

$\Rightarrow x\in \bigoplus_{i=1}^{s}\mathbb{F}C_i \Rightarrow$ ✓

定理 3.4.11 $\mathrm{char}\,\mathbb{F}\nmid |G|$. $S:=G$ 的共轭类数

1) $\mathbb{F}G$ 的单模数 $\leq S$

2) $\mathbb{F}$ 分裂 $\Rightarrow$ $\mathbb{F}G$ 的单模数 $=S$

Pf: $n:=$ 单模数. $\Rightarrow n\leq \dim_{\mathbb{F}} Z(\mathbb{F}G)=S$

$\mathbb{F}$ 分裂 $\Rightarrow \mathbb{F}G\cong M_{n_1}(\mathbb{F})\times\cdots\times M_{n_n}(\mathbb{F}) \Rightarrow n=\dim_{\mathbb{F}} Z(\mathbb{F}G)=S$ □

设 $\mathbb{F}G\cong M_{n_1}(\mathbb{F})\times\cdots\times M_{n_s}(\mathbb{F})$

$$C_i := \frac{1}{|C_i|}\sum_{g\in C_i} g \in Z(\mathbb{F}G) \quad C_i \text{的类和}$$

$$d_i := \frac{1}{n_i}\times M_{n_i}(\mathbb{F})\text{的单位元} \qquad (n_i d_i = e_i, \; tr(d_i)=1)$$

$C_1, \cdots, C_s$ & $d_1, \cdots, d_s$ 构成 $Z(\mathbb{F}G)$ 的两组基.

性质: 取定 $\chi_i=\chi_{V_i}$, $g_i\in C_i$, 对应特征标表矩阵记为 $\mathcal{X}=\begin{pmatrix}\chi_1\\ \vdots\\ \chi_s\end{pmatrix}(g_1\cdots g_s)$.

1). $(\chi_1, \cdots, \chi_s)$ 为 $(d_1, \cdots, d_s)$ 的对偶基. i.e. $\begin{pmatrix}\chi_1\\ \vdots\\ \chi_s\end{pmatrix}(d_1\cdots d_s)=I$

2). $(C_1, \cdots, C_s)=(d_1, \cdots, d_s)\mathcal{X}$ (注 $\mathcal{X}\begin{pmatrix}h_1 & & \\ & \ddots & \\ & & h_s\end{pmatrix}\bar{\mathcal{X}}=|G|\cdot I$)

Pf: $d_k\big|_{V_j}=\begin{cases}\frac{1}{n_j}\mathrm{id}_{V_j} & k=j\\ 0 & k\neq j\end{cases} \Rightarrow \chi_j(d_k)=tr(e_k|_{V_j})=\begin{cases}1 & k=j\\ 0 & k\neq j\end{cases}$

§3.5 代数与模的Jacobson根

目标：任一代数～半单代数，多远？引入Jacobson根来刻画。

定义：$I,J\lhd A$. $IJ=\{\sum_i a_ib_i \mid a_i\in I, b_i\in J\}\lhd A$　$I^n:=\underbrace{I\cdots I}_{n}$.

若 $\exists n$ s.t. $I^n=0$，则称 I 为 A 的幂零理想. 类似地，定义幂零左(右)理想

注：非交换环中幂零元生成的理想不一定幂零.

引理 3.5.1. 有限维 $\mathbb{F}$-代数有最大幂零理想，称为 A 的Jacobson根，记为 $rad(A)$.

Pf: $I^m=0=J^n \Rightarrow (I+J)^{m+n}=0$　$IJ^{d_1}IJ^{d_2}\cdots IJ^{d_m}\subseteq I^m$ □

性质：$Rad(A)$ 也为 A 的最大幂零左(右)理想

Pf: L=幂零左理想 $\Rightarrow LA$ = 幂零理想 $\Rightarrow L\subseteq LA\subseteq rad(A)$. □

定理 3.5.3. A=有限维 $\mathbb{F}$-代数. 则 A=半单 $\Leftrightarrow rad(A)=0$.

Pf: $\Rightarrow$) ✓ ($I\lhd A\Rightarrow I=I_1\times\cdots\times I_n\lhd A=A_1\times\cdots\times A_n$ 其中 $I_i=\{^0_{A_i}$ $\Rightarrow I^n=0$ iff $I=0$)

$\Leftarrow$) 设 $rad(A)=0$. 仅需证明 $\forall$ 极小左理想 I 有补

$rad(A)=0\Rightarrow I^2\neq 0\Rightarrow I^2=I\Rightarrow \exists y\in I$ s.t. $Iy=I$ $(0\neq Iy\subseteq I)$

$\Rightarrow \exists e\in I$ s.t. $ey=y \Rightarrow (e^2-e)y=0$

断言：$J=0$ 其中 $J:=\{a\in I \mid ay=0\}\ni e^2-e$

(J=左理想, $J\subseteq I$ & $J\neq I$
I 极小 $\Rightarrow J=0$)

$\Rightarrow e^2=e \Rightarrow I=Ae\Rightarrow A=Ae\oplus A(1-e)$ □

推论 3.5.4. 设 A=有限维 $\mathbb{F}$-代数. 则

i) $A/rad(A)$ = 半单

ii) A/I 半单 $\Leftrightarrow rad(A)\subseteq I$　　% $rad(A)$ 为 A 成为半单的障碍

iii) $rad(A/I)=(rad(A)+I)/I$

Pf: i) 任取幂零理想 $\bar{J}\lhd A/rad(A)$.　$J:=\{a\in A \mid a+rad(A)\in\bar{J}\}$

$\Rightarrow \exists N$ s.t. $\bar{J}^N=\bar{0}\Rightarrow J^N\subseteq rad(A)\Rightarrow J$ 幂零 $\Rightarrow J\subseteq rad(A)=\bar{J}=\bar{0}$.

$\Rightarrow rad(A/rad(A))=0\Rightarrow A/rad(A)$ 半单

ii) $\Rightarrow$): $(rad(A)+I)/I$ 幂零 $\overset{\text{半单}}{\Rightarrow} (rad(A)+I)/I\subseteq rad(A/I)=0\Rightarrow rad(A)\subseteq I$

$\Leftarrow$): $A/rad(A)$ = 半单 $\Rightarrow A/I=(A/rad(A))/(I/rad(A))$ = 半单

iii) "$\supseteq$": $(\mathrm{rad}(A)+I)/I$ 幂零

"$\subseteq$": $\dfrac{A/I}{(\mathrm{rad}(A)+I)/I} = \dfrac{A}{\mathrm{rad}(A)+I} = \dfrac{A/\mathrm{rad}(A)}{(\mathrm{rad}(A)+I)/\mathrm{rad}(A)}$ = 半单 $\Rightarrow \dfrac{\mathrm{rad}(A)+I}{I} \subseteq \mathrm{rad}(A/I)$

rad(A) 的基本性质:

引理 3.5.8. 设 $\mathrm{rad}(A)=0$, 则

(i) A 的所有极大左理想之交为零

(ii) A 的所有极大右理想之交为零

(iii) A 的所有极大理想之交为零

Pf: $\mathrm{rad}(A)=0 \Rightarrow A \cong M_{n_1}(D_1)\times\cdots\times M_{n_i}(D_i)\times\cdots\times M_{n_s}(D_s)$

$$V_{ij} := M_{n_1}(D_1)\times\cdots\times M_{n_{i-1}}(D_{i-1})\times\left\{\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{pmatrix} * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}\right\}\times M_{n_{i+1}}(D_{i+1})\times\cdots\times M_{n_s}(D_s)$$

(the zero column is the j-th column)

$$V_{ij}' := M_{n_1}(D_1)\times\cdots\times M_{n_{i-1}}(D_{i-1})\times\left\{\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}\right\}\times M_{n_{i+1}}(D_{i+1})\times\cdots\times M_{n_s}(D_s)$$

$$V_i := M_{n_1}(D_1)\times\cdots\times M_{n_{i-1}}(D_{i-1})\times\{0\}\times M_{n_{i+1}}(D_{i+1})\times\cdots\times M_{n_s}(D_s)$$

$\Rightarrow V_i\ (V_{ij}/V_{ij}')$ 为 A 的极大(左/右)理想, 且

$$\bigcap_i V_i = 0 \quad \left(\bigcap_{i,j} V_{ij} = 0 \ \Big/ \ \bigcap_{ij} V_{ij}' = 0\right)$$

称(左/右)理想 I 为拟正则理想, 若 $1-x$ 可逆 ($\forall x\in I$).

定理 3.5.9. $\mathrm{rad}(A)$ = 极大理想交 = 极大左理想交 = 极大右理想交
= 最大拟正则理想 = 最大拟正则左理想 = 最大拟正则右理想

Pf: • $\mathfrak{m}$ = 极大 $\Rightarrow \mathrm{rad}(A)\subseteq\mathfrak{m}$ (否则 $A=\mathrm{rad}(A)+\mathfrak{m} \Rightarrow 1=r+m \Rightarrow m=1-r$ 可逆 矛盾)

$\{m \lhd A \mid 极大\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\overline{m}\lhd A/\mathrm{rad}(A) \mid 极大\}$

引理 $\Rightarrow \mathrm{rad}(A) = \bigcap$ 极大(左/右). (这里用到了 A为有限维)

• 显然 rad(A) 拟正则(左右). 故证: 假若 rad(A) 不最大, 则 ∃ I 拟正则(左右) s.t.
$I \not\subseteq \mathrm{rad}(A) = \bigcap_{m\text{极大}} m \Rightarrow \exists\, \mathfrak{m}_0$ 极大(左右) s.t. $I\not\subseteq \mathfrak{m}_0$

$\Rightarrow I+\mathfrak{m}_0 = A \Rightarrow 1 = i+m \Rightarrow m = 1-i$ 可逆 矛盾

推论: A 有限维. $I \lhd A$, 则 I 幂零 $\Leftrightarrow$ I 中任意元素均幂零.

注 无限维不成立, e.g. $A=k[\![x^{\frac{1}{n}} \mid n\in\mathbb{N}]\!]/(x)$ $\quad I=(x^{\frac{1}{n}} \mid n\in\mathbb{N}) \lhd A$

模的 Jacobson 根理论

A = 有限 A-代数，M = 左 A-模。 $\Leftrightarrow$ M/N 可看成 $A/rad(A)$-模

性质：设 N 为 M 的子模，则 M/N 半单当且仅当 $rad(A)M \subseteq N$.

Pf: $\Leftarrow$): $M/rad(A)M$ 为 $A/rad(A)$-模 $\Rightarrow$ $M/rad(M)$ 半单 $\Rightarrow$ M/N 半单

$\Rightarrow$): 设 S 为单模，则 $rad(A)S=0$.（否则 $rad(A)S=S \overset{N\gg 0}{\Rightarrow} S=rad(A)^N S=0$ 矛）

因此 $rad(A)(M/N)=0$. 即 $rad(A)M \subseteq N$.

定义 称 $rad(M) := rad(A).M$ 为 M 的 Jacobson 根.

基本性质：
1) $rad\,(\bigoplus_i M_i) = \bigoplus_i rad\,(M_i)$
2) M/N 半单 $\Leftrightarrow$ $rad(M) \subseteq N$
3) M 半单 $\Leftrightarrow$ $rad(M)=0$ $\Leftarrow$ M 可看成 $A/rad(A)$-模.
4) $M/rad(M)$ 半单
5) $f: M\to N \Rightarrow f(rad(M)) \subseteq rad(N)$ （诱导 $\bar{f}: M/rad(M) \to N/rad(N)$）

性质 1) $rad(M) = \bigcap_{N\subset M \text{极大}} N$

2) $f: M\to N$ 满 $\Leftrightarrow$ $\bar{f}: M/rad(M) \to N/rad(N)$ 满 （Nakayama 引理）

Pf: 1) N = 极大. $\Rightarrow$ M/N = 单 $\overset{ii)}{\Rightarrow}$ $rad(M/N)=0$ $\Rightarrow$ $rad(M)\subseteq N$ $\Rightarrow$ $rad(M) \subseteq \bigcap_{N=\text{极大}} N$

反之，$\forall\, m \notin rad\,M$ $\Rightarrow$ $\bar{0}\neq \bar{m} \in \bar{M} = M/rad(M)$ = 半单

$\Rightarrow$ $\exists$ 单模 S s.t. $M \overset{f}{\twoheadrightarrow} S$ $f(m)\neq 0$.

$\Rightarrow$ $m \notin \ker f$ （极大） $\Rightarrow$ $m \notin \bigcap_{N \text{极大}} N$

2) $\Rightarrow$): ✓. $\Leftarrow$): $\bar{f}$ 满 $\Rightarrow$ $N = f(M) + rad(N)$

$\Rightarrow N = f(M)$ （否则 $f(M) \subseteq L \subsetneq N$, L 极大. $\Rightarrow N = f(M) + rad(N) \subseteq L$ 矛）

性质 A = 有限维 $\mathbb{F}$-代数，(S,ρ) = 有限维单 A-模，则

i). $\{$单 $A/rad(A)$-模$\}$ = $\{$单 A-模$\}$

ii). 设 S 相应 $A/rad(A)$ 的单因子为 $M_n(D)$. 则 $\rho(A) \cong M_n(D)$

特别地，若 $Hom_A(S,S)\cong \mathbb{F}$, 则 $\rho(A) = M_n(\mathbb{F})$

Pf: i) $rad(A)S=0 \Rightarrow S$ 来自 $A/rad(A)$-模

ii). $A \twoheadrightarrow A/rad(A) \twoheadrightarrow M_n(D) \overset{\rho}{\to} End_{\mathbb{F}}(S) \xRightarrow{\text{Thm 3.4.7 (ii.3)}} \checkmark$.

定理 A=有限维代数. 则 $\mathrm{rad}(A)=\bigcap\limits_{S\text{单}}\mathrm{ann}(S)$ 且 A(半)单 $\Leftrightarrow$ $\exists$ 忠实(半)单 A-模.

Pf 1): "$\supseteq$": $\bigcap\limits_{S\text{单}}\mathrm{ann}(S)\subset\bigcap\limits_{m:\text{极大左}} m=\mathrm{rad}(A)$.

"$\subseteq$": S单 $\Rightarrow \mathrm{rad}(A)S=0 \Rightarrow \mathrm{rad}(A)\subseteq\mathrm{ann}(S)$

2) $\Rightarrow$): ✓ $\Leftarrow$): 半单: 半单 A-模, 均可看成 $A/\mathrm{rad}(A)$-模, $\Rightarrow \mathrm{rad}(A)=0\Rightarrow A$半单.

单: $\exists$ 忠实单 A-模 $\Rightarrow A$单 (否则 $A=A_1\times\cdots\times A_r$ $(r\geq 2)$ 矛)

定理 3.5.7. 若 $\mathbb{F}$ 分裂 G. 则 $\mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}G$ 在 $cf_{\mathbb{F}}(G)$ 中线性无关.

注: 上述结论对于任一域均成立.

引理 $(S,\varphi),(S',\varphi')$: 不同构的不可约 A-表示 (有限维), 则

$\forall a\in A\ \exists b\in A$ s.t. $\begin{cases}\varphi(b)=\varphi(a)\\ \varphi'(b)=0.\end{cases}$ (将 b 看成 a 在 S 上的投影)

Pf:
$$\begin{array}{ccccc} A & \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} & A/\mathrm{rad}(A)=M_{n_1}(D_1)\times\cdots\times M_{n_s}(D_s) & & \\ & & \downarrow\varphi_i \qquad\qquad \downarrow & & \\ & & \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V_i) \longleftarrow M_{n_i}(D_i) & & \end{array}$$

$\pi(a)=:x_1+x_2+\cdots+x_s \qquad x_i\in M_{n_i}(D_i)$

取 $b\in\pi^{-1}(x_i)$, 则 $\begin{cases}\varphi_i\circ\pi(b)=\varphi_i(x_i)=\varphi_i\circ\pi(a)\\ \varphi_j\circ\pi(b)=\varphi_j(x_i)=0\end{cases}$

即, $\varphi(b)=\varphi(a)$ & $\varphi'(b)=0$.

Pf of thm: 记 $\mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}G=\{\varphi_1,\cdots,\varphi_s\}$, $\chi_i=\chi_{\varphi_i}$. ($\varphi_i:\mathbb{F}G\to\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V_i)$)

设 $\sum\limits_{i=1}^{s}c_i\chi_i=0$, $c_i\in\mathbb{F}$.

$\varphi_i(\mathbb{F}G)=M_{n_i}(\mathbb{F})\ni e_{i11}=\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix}$

Thm 3.5.6 $\Rightarrow \exists b_i\in\mathbb{F}G$ s.t. $\varphi_i(b_i)=e_{i11}$ & $\varphi_j(b_i)=0$ $(\forall j\neq i)$

$\Rightarrow \chi_i(b_i)=1$ & $\chi_j(b_i)=0 \Rightarrow c_i=0$ $(\forall i)$

推论. 若 $\mathbb{F}$ 分裂 G, 则

1) χ=不可约特征标 $\Rightarrow \chi\neq 0$.

2) $\chi_1=\chi_{\varphi_1}$, $\chi_2=\chi_{\varphi_2}$ 不可约, 则 $\varphi_1\cong\varphi_2$ iff $\chi_1=\chi_2$

3) $|\mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}G|=|\mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}G|$

§ 代数及其模的矩阵划分 (连通分解的推广)

通过正交幂等分解,可对代数和模作分块拆分,类似于分块矩阵

推广了正交中心幂等分解!

设 $1=e_1+e_2+\cdots+e_n$ 正交幂等分解. 则 A 有如下几种分解形式

1) ${}_AA = Ae_1\oplus Ae_2\oplus\cdots\oplus Ae_n$ (左 A-模分解)

2) $A_A = e_1A\oplus e_2A\oplus\cdots\oplus e_nA$ (右 A-模分解).

3) (双边 Peirce 分解) $A=\bigoplus\limits_{i,j=1}^{n} e_iAe_j$ (向量空间分解)

任取 $a_{ij}\in A_{ij}:=e_iAe_j$ ($\forall i j$), 记 $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & & a_{nn}\end{pmatrix} := \sum\limits_i\sum\limits_j a_{ij}\in A$.

A 中元素可唯一地表达为如上矩阵形式. 且 A 上运算可归结为矩阵运算. 因此可将 A 表示为如下矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{n1} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix} := \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} \middle|\, a_{ij}\in A_{ij}\right\}$$

设 M 为左 A-模. 记 $M_i:=e_iM$. $\forall\, m_i\in M_i$ 记 $\begin{pmatrix} m_1\\ \vdots\\ m_n\end{pmatrix} := \sum\limits_i m_i\in M$.

则 左 A-模 ${}_AM$ 可表示为列向量形式 $\begin{pmatrix} M_1\\ \vdots\\ M_n\end{pmatrix} := \left\{\begin{pmatrix} m_1\\ \vdots\\ m_n\end{pmatrix} \middle|\, m_i\in M_i\right\}$

类似地, 右 A-模 N_A 可表示为行向量形式 $(N_1,\cdots,N_n) := \{(n_1,\cdots,n_n)\mid n_i\in N_i := Ne_i\}$

A_{ii} ($\forall i$) 为以 e_i 为幺元的 $\mathbb{F}$-代数. 代数 A 上的乘法自然地给出 A_{ij} 上的左 A_{ii}-模和右 A_{jj}-模结构 $A_{ii}\times A_{ij}\xrightarrow[(a,b)\mapsto ab]{} A_{ij}$, $A_{ij}\times A_{jj}\xrightarrow[(b,c)\mapsto bc]{} A_{ij}$ 且满足 $(ab)c=a(bc)$.

定义 3.2.8. $A, B=\mathbb{F}$-代数. 若 M 即为左 A-模 又为右 B-模 且

$$(am)b=a(mb)\quad \forall\, a\in A,\ b\in B,\ m\in M$$

则称 M 为 A-B-双模 记为 ${}_AM_B$. ($\Leftrightarrow$ M 为 左 $A\times B^{opp}$-模)

例: 1) ${}_AA_A$, ${}_{A_{ii}}{A_{ij}}_{A_{jj}}$

2) $\mathrm{Hom}_A({}_AM_B, {}_AN)$ 为左 B-模 $\quad$ $\mathrm{Hom}_B(L_B, {}_AM_B)$ 为左 A-模

$\mathrm{Hom}_B({}_AM_B, N_B)$ 为右 A-模 $\quad$ $\mathrm{Hom}_A({}_AL, {}_AM_B)$ 为右 B-模

3) $\mathrm{Hom}_A(A, M)\cong M$

-3-20- 4). $\mathrm{End}_A({}_AA)\cong A^{opp}$ $f\mapsto f(1)$ $f\circ g\mapsto f(g(1))=g(1)f(1)=f(1)*^{opp}g(1)$

§3.8 模在代数上的张量积 (底域扩张对表示的影响)

3.8.1 $A,B=\mathbb{F}$-代数 $A=\bigoplus \mathbb{F}a_i$ $B=\bigoplus_j \mathbb{F}b_j$

$$A\otimes B := \bigoplus_{i,j}\mathbb{F}(a_i\otimes b_j)$$

$$(a_i\otimes b_j)\cdot(a_{i'}\otimes b_{j'}) := (a_i a_{i'})\otimes(b_j b_{j'})$$

线性扩充 $\rightsquigarrow$ $A\otimes B$ 上的乘法

性质: $A\otimes_{\mathbb{F}} B$ 构成 $\mathbb{F}$-代数, 称为代数 A 与 B 的张量积.

例: $K/\mathbb{F}$ = 扩域. 则 $K\otimes_{\mathbb{F}} B$ 与 $A\otimes_{\mathbb{F}} K$ 构成 K 代数.

$\mathbb{F}[X]\otimes_{\mathbb{F}}\mathbb{F}[Y]=\mathbb{F}[X,Y]$

3.8.2. 称 $f: M_A\times {}_AN\to V$ 为 A-平衡映射, 若 $f(ma,n)=f(m,an)$ $\forall a,m,n$.

称 $(W,\eta: M\times N\to W)$ 为 M_A 与 ${}_AN$ 在A上的张量积, 若

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\forall f"'] & W \arrow[d, dotted, "\exists!\tilde{f}"] \\ & V \end{tikzcd}$$

记为 $M\otimes_A N := W$.

性质: i) 张量积存在且唯一 (同构意义下)

ii) $M\otimes_A N$ 为 $M\otimes_{\mathbb{F}} N$ 的商.

3.8.3. ${}_BM_A\otimes_A {}_AN_C$ 为 B-C-双模: $b(m\otimes n)c := (bm)\otimes(nc)$

注: $M,N=G$-模 $\Rightarrow$ $M\otimes_{\mathbb{F}}N$ 上有两个 G-模结构.

性质 1) (结合律): $({}_AM_B\otimes_B {}_BN_C)\otimes_C {}_CL_D \xrightarrow{\cong} {}_AM_B\otimes_B({}_BN_C\otimes_C {}_CL_D)$ 作为A-B双模

2). ${}_B(M_1\oplus\cdots\oplus M_t)\otimes N_C \cong {}_B(M_1\otimes N)_C\oplus\cdots\oplus{}_B(M_t\otimes N)_C$

3). ${}_AA_A\otimes_A {}_AM\cong {}_AM$ $\quad N_A\otimes_A {}_AA_A\cong N_A$

4). $M\otimes_A -$ 与 $-\otimes_A N$ 均是右正合函子

定义 3.8.9: M_A 平坦 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $M\otimes_A -$ 正合 $\overset{性质}{\Longleftrightarrow}$ $M\otimes_A -$ 保单射

${}_AN$ 平坦 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $-\otimes_A N$ 正合 $\overset{性质}{\Longleftrightarrow}$ $-\otimes_A N$ 保单射.

性质 1). $M_1\oplus M_2$ 平坦 $\Leftrightarrow$ M_1,M_2 平坦

2). 投射 $\Rightarrow$ 平坦

§3.9. 绝对单模与分裂域

系数的扩张如何影响表示的不可约性

A = 有限维 $\mathbb{F}$-代数. $K/\mathbb{F}$ = 域扩张

3.9.1. $V = \mathbb{F}$-向量空间.

$V^K := K \otimes_{\mathbb{F}} V$ （$\{v_1, \cdots, v_n\} = V$ 的 $\mathbb{F}$-基 $\Rightarrow \{1\otimes v_1, \cdots, 1\otimes v_n\} = V^K$ 的 K-基.

性质: i) M = 左 A-模 $\Rightarrow M^K$ = 左 A^K-模, $((r\otimes a).(r'\otimes m)) := (rr')\otimes(am)$.

ii) M^K = 单 A^K-模 $\Rightarrow M$ = 单 A-模, $\not\Leftarrow$

例: $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \curvearrowright M = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$. $T.(e_1, e_2) = (e_1\ e_2)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- 特征多项式为 $\lambda^2+1 \Rightarrow$ 不可约(在 $\mathbb{R}$ 上) $\Rightarrow M$ = 单
- $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ = abelian $\Rightarrow M^{\mathbb{C}} = M_1 \oplus M_2$ (其中 $\dim_{\mathbb{C}} M_i = 1$) $(M_i = \mathbb{C}(e_1 \pm ie_2))$

引理 3.9.2: $\mathrm{Hom}_{A^K}(M^K, N^K) \cong \mathrm{Hom}_A(M, N)^K$

特别地, $\dim_K \mathrm{End}_{A^K}(M^K) = \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{End}_A(M)$.

Pf: 设 $r_1 \cdots r_{[K:\mathbb{F}]}$ 为 K 的一组 $\mathbb{F}$ 基, 则 M^K 中元素均可唯一地写成

$$\sum_{i=1}^{[K:\mathbb{F}]} r_i \otimes m_i \quad (m_i \in M)$$

$\exists$ 自然映射 $\varphi: \mathrm{Hom}_A(M,N)^K \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A^K}(M^K, N^K)$

$$\sum_i r_i \otimes f_i \longmapsto \left(\sum_j s_j \otimes m_j \mapsto \sum_{ij} r_i s_j \otimes f_i(m_j)\right)$$

$\underline{\varphi: 单}$ 若 $\varphi(\sum_i r_i \otimes f_i) = 0$, 则 $\sum_i r_i \otimes f_i(m) = 0 \ \forall m$

$\Rightarrow f_i(m) = 0 \quad \forall i, \forall m \Rightarrow f_i = 0 \ \forall i \Rightarrow \sum_i r_i \otimes f_i = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}\,\varphi = 0$.

$\underline{\varphi: 满}$. $\forall\ \psi \in \mathrm{Hom}_{A^K}(M^K, N^K)$

$\Rightarrow \psi(1\otimes m) =: \sum_i r_i \otimes \psi_i(m)$

$\Rightarrow \psi = \varphi\left(\sum_i r_i \otimes \psi_i\right)$

$$\left(\begin{array}{l} \psi_i \in \mathrm{Hom}_A(M,N) \\ \psi(1\otimes am) =: \sum_i r_i \otimes \psi_i(am) \\ \quad \shortparallel \\ (1\otimes a)\psi(1\otimes m) = \sum_i r_i \otimes a\psi_i(m) \end{array}\right)$$

$\square$

定义 3.9.3：称单A-模 M 为**绝对单模**，若 $\forall K/\mathbb{F}$ 扩域，M^K 均为单.

$(M,\rho)=A$-模，$\rho: A\to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(M)\quad a\mapsto a_L$

$A_L := \mathrm{im}\,\rho \cong A/\mathrm{ann}(M)$

性质：$M/A=$单 $\Leftrightarrow$ $M/A_L=$单

引理：$M=$单A-模，则 M 绝对单 $\Leftrightarrow \mathrm{End}_A(M)=\mathbb{F}$.

Pf：$\Rightarrow$)：$\dim_{\mathbb{F}}\mathrm{End}_A(M)=\dim_K \mathrm{End}_{A^K}(M^K)=1$

$\Leftarrow$)：$\mathrm{End}_A(M)=\mathbb{F}\Rightarrow M=$单A-模、$\Rightarrow M=$忠实单 A_L-模、

$\overset{3.5.10}{\Rightarrow} A_L=$单代数

$\overset{4.7(ii)}{\Longrightarrow} A_L=\rho(A)=M_n(\mathrm{End}_A(M))\qquad (n=\dim_{\mathbb{F}}M)$

$\Rightarrow M=$单 $M_n(\mathbb{F})$-模、

$\Rightarrow M^K=$单 $M_n(K)$-模、

$\Rightarrow M^K=$单 $(A^K)_L$-模 $\quad \left((A^K)_L\cong (A_L)^K=M_n(K)\right)$

$\Rightarrow M^K=$单 A^K-模、

定义 3.9.4. 若 $A^K/\mathrm{rad}(A^K)\cong M_{n_1}(K)\times\cdots\times M_{n_s}(K)$，则称 K 为A的一个分裂域.

性质：K分裂 $\overset{①}{\Leftrightarrow}$ 单A^K-模均绝对单 $\overset{②}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{End}_{A^K}(S)=K$ $\overset{③}{}$ （$\forall$单A^K-模 S）

Pf：(ii) $\overset{Th3.9.4}{\Longleftrightarrow}$ (iii)

i)$\Rightarrow$iii)：$S/A^K=$单 $\Rightarrow S/A^K/\mathrm{rad}(A^K)=$单 $\Rightarrow S/M_{n_i}(K)=$单 $\Rightarrow \mathrm{End}_{A^K}(S)=K$

iii)$\Rightarrow$i)：$\{S_i\mid i\}$ 全体单 A^K-模、$\left(\Rightarrow \mathrm{End}_{A^K}(S_i)=K\right)$

$\Rightarrow A^K/\mathrm{rad}(A^K)\overset{\text{标准}}{=}\prod_i M_{n_i}\left(\mathrm{End}_{A^K}(S_i)^{op}\right)=\prod_i M_{n_i}(K)\qquad\square$

注：i) {绝对单} ⊆ {单}. "=" ⇔ 分裂

ii) $\mathbb{F}$分裂G ⇔ $\mathbb{F}$分裂 $\mathbb{F}G$.

引理 3.9.5. S/A^K=单 ⇒ $\exists!\ U/A$=单 s.t. S为U^K的合成因子.

此时，$\mathrm{Hom}_{A^K}(U^K,S)\neq 0$.

Pf: 存在性: $\mathrm{Hom}_{A^K}(A^K,S)\neq 0$. 取 $_AA$ 的合成列 ⇒ $\exists\ U/A$=单 s.t. $\mathrm{Hom}_{A^K}(U^K,S)\neq 0$.

唯一性: $U,U'/A$=单 且 S为U^K,U'^K的合成因子.

Th3.5.6 ⇒ $\exists\ a\in A$ s.t. $a|_{U'}=\mathrm{id}$ & $a|_U=0$

$\Rightarrow 1\otimes a|_S=\mathrm{id}$ & $1\otimes a|_S=0$ ↯.

定理 3.9.6. $E/K/\mathbb{F}$=扩张

$$K\text{分裂}A \Leftrightarrow \begin{cases} E\text{分裂}A\text{，且} \\ \{S/A^K \mid \text{单}\}\xrightarrow[S\mapsto S^E]{1:1}\{T/A^E \mid \text{单}\} \end{cases}$$

Pf: ⇒):

K分裂 $\overset{Th9.4}{\Longrightarrow}$ S_i^E/A^E=(绝对)单

Lem9.2 ⇒ $\mathrm{Hom}_{A^E}(S_i^E,S_j^E)=0$ ⇒ 单射

Lem9.5 ⇒ $\forall\ S/A^E$单 $\exists\ i$ s.t. $\mathrm{Hom}_{A^E}(S_i^E,S)\neq 0$ ⇒ 满射.

⇐): E分裂 A ⇒ $\{T/A^E \mid \text{单}\}\xrightarrow[T\mapsto T^{\bar E}]{1:1}\{U/A^{\bar E} \mid \text{单}\}$

$\forall\ U/A^K$=单 $\Rightarrow \dim\mathrm{End}_{A^K}(S)\overset{9.2}{=}\dim\mathrm{End}_{A^{\bar E}}(S^{\bar E})\overset{9.4}{\cong}1$

$\overset{9.4}{\Longrightarrow}$ K分裂 A.

推论 3.9.10. $\forall$有限维$\mathbb{F}$-代数，存在有限扩张 $K/\mathbb{F}$ 为A的分裂域.

Pf: $(V_1,\varphi_1),\cdots,(V_n,\varphi_n)$ 全体单 $A^{\bar{\mathbb{F}}}$-模.

$A=\bigoplus_{j=1}^{\delta}\mathbb{F}a_j \Rightarrow \varphi_i(a_j)=(a_{st}^{(ij)})_{N_i\times N_i} \Rightarrow K:=\mathbb{F}(a_{st}^{(ij)}\mid i,j,s,t)$ 分裂 A. □

推论 3.9.7. $K/\mathbb{F}$=扩张

$$\mathbb{F}\text{分裂}G \Leftrightarrow \begin{cases} K\text{分裂}G \\ \mathrm{Irr}_K G=\{\varphi^K \mid \varphi\in\mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}G\} \end{cases}$$

推论 3.9.11. $\forall G, \forall\mathbb{F}$ $\exists$有限扩张 $K/\mathbb{F}$ 分裂 G.

§ 表示的不可约特征标线性无关性

回顾：$\mathrm{char}\,\mathbb{F}\nmid |G|$，$\mathbb{F}$分裂$G$ 则 1) $\varphi\cong\varphi' \overset{\text{不可约}}{\Leftrightarrow} \chi_\varphi=\chi_{\varphi'}$ 2) $\mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}(G)$为$\mathrm{cf}_{\mathbb{F}}(G)$的一组基.

问题：$\mathrm{char}\,\mathbb{F}\nmid |G|$，$\mathbb{F}$分裂$G$是否可以去除？ 1) ✓ 2) 改成线性无关

定理 3.10.4. $\mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}G$ 在 $\mathrm{cf}_{\mathbb{F}}(G)$ 中线性无关.

推论： i) χ不可约 $\Rightarrow$ $\chi\neq 0$ 任意情形特征标足以区分不可约表示！

ii) φ_1,φ_2 不可约 则 $\varphi_1\simeq\varphi_2\Leftrightarrow\chi_{\varphi_1}=\chi_{\varphi_2}$

iii) $|\overline{\mathrm{Irr}}_{\mathbb{F}}G|=|\mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}G|$

定义 3.10.1 可分扩张 $K/\mathbb{F}$ ($\forall\alpha\in K$，α的极小多项式无重根) 例. $\mathrm{char}\,\mathbb{F}=0$ or $K=\text{finite}$

引理 3.10.2. $K/\mathbb{F}=$有限可分，$E/\mathbb{F}=$扩张 $\Rightarrow$ $E\otimes_{\mathbb{F}}K=\prod_i E_i$ (E_i/E 有限可分)

Pf: $E\otimes_{\mathbb{F}}K\overset{\text{单扩张}}{=}E[x]/f(x)\cong\prod_i E[x]/f_i(x)\cong\prod_i E_i$ □

引理 3.10.3. $\#G<\omega$，$\mathrm{char}\,\mathbb{F}=p>0$. $K/\mathbb{F}=$扩张，则 (书上有$p\nmid|G|$条件)

$$\varphi\in\overline{\mathrm{Irr}}_{\mathbb{F}}G\Rightarrow\varphi^K=\bigoplus_{i=1}^{t}\varphi_t$$

其中$\varphi_i\,(\forall i)$不可约且$\varphi_i\neq\varphi_j$.

Pf: $A:=\mathbb{F}G$ $A_0:=\mathbb{F}_pG$.

断言：若$\mathrm{char}\,\mathbb{F}=p>0$，则 $A/\mathrm{rad}(A)\cong\bigoplus_{j\in J}M_{m_j}(\mathbb{F}_j)$ 其中 $\mathbb{F}_j/\mathbb{F}$ 有限可分.

(1°. $\mathrm{rad}(A_0)$ 幂零 $\Rightarrow\mathrm{rad}(A_0)^{\mathbb{F}}$ 幂零 $\Rightarrow\mathrm{rad}(A_0)^{\mathbb{F}}\subseteq\mathrm{rad}(A)$

2° $A/\mathrm{rad}(A_0)^{\mathbb{F}}=(A_0/\mathrm{rad}(A_0))^{\mathbb{F}}=\bigoplus_{i\in I}M_{n_i}(D_i\otimes_{\mathbb{F}_p}\mathbb{F})=\bigoplus_{j\in J}M_{m_j}(\mathbb{F}_j)$ Wedderburn ($D_i=$有限域))

$\varphi\in\overline{\mathrm{Irr}}_{\mathbb{F}}(G)\Rightarrow\varphi=$单$A/\mathrm{rad}(A)$-模 $\Rightarrow\exists j$ s.t. $M_{m_j}(\mathbb{F}_j)\cong m_j\cdot\varphi$

$$\Rightarrow m_j\varphi^K\cong M_{m_j}(\mathbb{F}_j)^K\cong M_{m_j}(\mathbb{F}_j\otimes K)$$

$$\cong\bigoplus_{\ell=1}^{t}M_{m_j}(K_\ell)\cong\bigoplus_{\ell=1}^{t}m_j\,\varphi_\ell\overset{\text{Jordan-Hölder}}{\Rightarrow}\varphi^K\cong\bigoplus_{\ell=1}^{t}\varphi_\ell$$

Pf of thm: 1° $\mathrm{char}\,\mathbb{F}=0 \Rightarrow$ 正交关系 $\Rightarrow \checkmark$

2° $\mathrm{char}\,\mathbb{F}=p>0$. $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{F}}}G =: \{\chi_1,\cdots,\chi_s\}$ 通过线性扩充可将 χ_i 看成

$$\overline{\mathbb{F}}G \xrightarrow{\pi} M_{n_1}(\overline{\mathbb{F}})\times\cdots\times M_{n_s}(\overline{\mathbb{F}}) \twoheadrightarrow M_{n_i}(\overline{\mathbb{F}}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \overline{\mathbb{F}}$$

- $\forall$ 取 $A_i \in M_{n_i}(\overline{\mathbb{F}})$ s.t. $\mathrm{tr}(A_i)=1$. $\exists f_i \in \overline{\mathbb{F}}G$ s.t. $\pi(f_i)=(0,\cdots,A_i,\cdots,0)$.

设 $\sum_j a_j\chi_j=0 \overset{\forall i}{\Rightarrow} \sum_j a_j\chi_j(f_i)=0 \Rightarrow a_i=0 \Rightarrow$ 线性无关

设 $\overline{\mathrm{Irr}}_{\mathbb{F}}G=\{(U_1,\rho_1),\cdots,(U_r,\rho_r)\}$, $\mathrm{Irr}_{\mathbb{F}}G=\{\mu_1,\cdots,\mu_r\}$

引理 $\Rightarrow \rho_i^{\overline{\mathbb{F}}}=\bigoplus_j \rho_{ij} \quad (\rho_{ij}\ncong\rho_{ij'})$

$\Rightarrow \mu_i=\sum_j \chi_{ij}$

$\Rightarrow \mu_1,\cdots,\mu_r$ 线性无关.